

高三练习卷

数学（参考答案与评分建议）

一、选择题（单选）：

- | | | | |
|------|------|------|------|
| 1. C | 2. A | 3. B | 4. C |
| 5. B | 6. D | 7. A | 8. B |

二、选择题（多选）：

- | | | | |
|--------|--------|---------|---------|
| 9. BCD | 10. BC | 11. ABC | 12. ABD |
|--------|--------|---------|---------|

三、填空题：

13. $\frac{4}{5}$

14. $e^x + C$ ， C 为任意常数（或 $\ln(x+1) + C$ ， $ax^3 + bx^2 + x + d$ ， $\sin x + C$ 等）

15. 1, 4

16. $\sqrt{15}$

四、解答题：

17. 【解】（1）设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q .

因为 $a_6 = 2$ ， $a_4 + a_5 = 12$ ，

$$\text{所以 } a_4 + a_5 = \frac{a_6}{q^2} + \frac{a_6}{q} = \frac{2}{q^2} + \frac{2}{q} = 12，$$

$$\text{所以 } 6q^2 - q - 1 = (2q - 1)(3q + 1) = 0，$$

$$\text{因为 } a_n > 0，\text{ 所以 } q > 0，\text{ 所以 } q = \frac{1}{2}， \quad \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

$$\text{所以 } a_n = a_6 q^{n-6} = 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-6} = \frac{1}{2^{n-7}}. \quad \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

$$\begin{aligned} (2) \text{ 法一: } b_n &= a_1 a_3 a_5 \cdots a_{2n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-6} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{-4} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} \times \cdots \times \left(\frac{1}{2}\right)^{2n-8} \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^{-6-4-2+\cdots+2n-8} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n^2-7n}. \quad \dots\dots\dots 8 \text{ 分} \end{aligned}$$

$$\text{所以数列 } \{b_n\} \text{ 的最大项为 } b_3 = b_4 = 4096. \quad \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

法二：因为 $a_n = \frac{1}{2^{n-7}}$ ，所以 $a_{2n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{2n-8}$ 。

由 $a_{2n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{2n-8} \geq 1$ ，得 $n \leq 4$ 。……………8 分

所以数列 $\{b_n\}$ 的最大项为 $b_3 = b_4 = 4096$ 。……………10 分

18. 【解】 在 $\triangle PBC$ 中， $\angle C = \gamma = 30^\circ$ ， $\angle CPB = \beta - \gamma = 15^\circ$ ， $BC = 1$ 。

由正弦定理 $\frac{BC}{\sin \angle CPB} = \frac{PB}{\sin \angle C}$ ，

即 $\frac{1}{\sin 15^\circ} = \frac{PB}{\sin 30^\circ}$ ，所以 $PB = \frac{1}{2 \sin 15^\circ}$ 。……………4 分

在 $\triangle PAB$ 中，因为 $\angle A = \alpha = 15^\circ$ ， $\angle ABP = \beta = 45^\circ$ ，

所以 $\angle APB = 180^\circ - \angle A - \angle ABP = 120^\circ$ 。

由正弦定理 $\frac{BP}{\sin \angle A} = \frac{AB}{\sin \angle APB}$ ，

所以 $AB = \frac{\sin 120^\circ}{2 \sin^2 15^\circ} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1 - \cos 30^\circ} = 3 + 2\sqrt{3}$ ，……………8 分

所以 $DE = AB - AD - EB = 3 + 2\sqrt{3} - \frac{5}{2} - \frac{1}{2} = 2\sqrt{3}$ ，

所以隧道 DE 的长度为 $2\sqrt{3}$ km。……………12 分

说明：本题也可以借助山的高度，利用平面几何知识求解。

19. 【解】 (1) 取 AD 的中点 O ，连结 OB ， OC ， OP 。

在 $\triangle PAD$ 中，因为 $PA = PD$ ， O 为 AD 的中点，

所以 $PO \perp AD$ 。

因为平面 $PAD \perp$ 平面 $ABCD$ ，

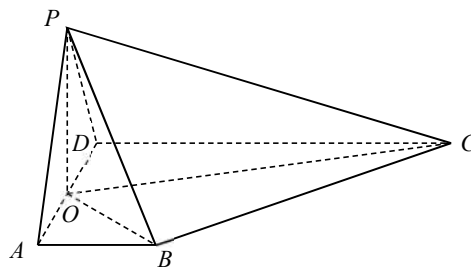
平面 $PAD \cap$ 平面 $ABCD = AD$ ，

$PO \subset$ 平面 PAD ，

所以 $PO \perp$ 平面 $ABCD$ 。……………2 分

因为 $BC \subset$ 平面 $ABCD$ ，

所以 $PO \perp BC$ 。



在四边形 $ABCD$ 中, $AB \parallel CD$, $AB \perp AD$,

且 $AB=1$, $AD=2$, $CD=3$,

所以 $OB=\sqrt{2}$, $OC=\sqrt{10}$, $BC=2\sqrt{2}$,

所以在 $\triangle OBC$ 中, 有 $OB^2 + BC^2 = OC^2$,

所以 $\angle OBC = 90^\circ$, 即 $OB \perp BC$4 分

因为 $PO, OB \subset$ 平面 POB , $PO \cap OB = O$,

所以 $BC \perp$ 平面 POB .

因为 $PB \subset$ 平面 POB ,

所以 $PB \perp BC$6 分

说明: 本题也可以用空间向量的方法证明.

(2) 由 (1) 知, $PO \perp$ 平面 $ABCD$,

所以 OB 为 PB 在平面 $ABCD$ 内的射影,

即 $\angle PBO$ 为直线 PB 与平面 $ABCD$ 所成的角,

所以 $\angle PBO = 45^\circ$.

所以在 $\triangle POB$ 中, $PO = OB = \sqrt{2}$8 分

解法一: 如图, 分别以 OA, OP 所在直线为 x 轴和 z 轴,

以平面 $ABCD$ 内过点 O 且与 OA 垂直的直线为 y 轴,

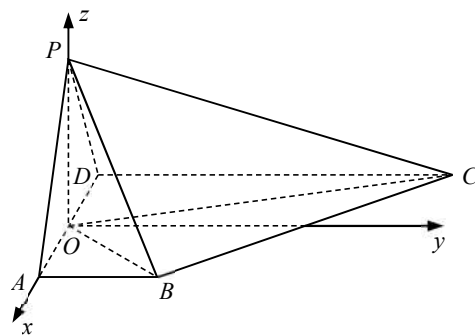
建立空间直角坐标系,

则 $A(1, 0, 0)$, $B(1, 1, 0)$,

$C(-1, 3, 0)$, $P(0, 0, \sqrt{2})$,

所以 $\overrightarrow{PB} = (1, 1, -\sqrt{2})$,

$\overrightarrow{BC} = (-2, 2, 0)$, $\overrightarrow{AB} = (0, 1, 0)$.



设平面 PBC 的一个法向量 $\mathbf{n}_1 = (x_1, y_1, z_1)$,

$$\text{则} \begin{cases} \mathbf{n}_1 \perp \overrightarrow{PB}, \\ \mathbf{n}_1 \perp \overrightarrow{BC}, \end{cases} \quad \text{即} \begin{cases} \mathbf{n}_1 \cdot \overrightarrow{PB} = x_1 + y_1 - \sqrt{2}z_1 = 0, \\ \mathbf{n}_1 \cdot \overrightarrow{BC} = -2x_1 + 2y_1 = 0, \end{cases}$$

取 $x_1 = 1$, 可得 $\mathbf{n}_1 = (1, 1, \sqrt{2})$.

设平面 PAB 的一个法向量 $\mathbf{n}_2 = (x_2, y_2, z_2)$,

$$\text{则} \begin{cases} \mathbf{n}_2 \perp \overrightarrow{PB}, \\ \mathbf{n}_2 \perp \overrightarrow{AB}, \end{cases} \quad \text{即} \begin{cases} \mathbf{n}_2 \cdot \overrightarrow{PB} = x_2 + y_2 - \sqrt{2}z_2 = 0, \\ \mathbf{n}_2 \cdot \overrightarrow{AB} = y_2 = 0, \end{cases}$$

取 $x_2 = \sqrt{2}$, 可得 $\mathbf{n}_2 = (\sqrt{2}, 0, 1)$10 分

设二面角 $A-PB-C$ 的大小为 θ ,

$$\text{则} |\cos \theta| = \frac{|\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2|}{|\mathbf{n}_1| \cdot |\mathbf{n}_2|} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3} \times 2} = \frac{\sqrt{6}}{3},$$

$$\text{所以} \sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

即二面角 $A-PB-C$ 的正弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$12 分

解法二: 作 $AH \perp PB$ 于点 H .

因为 $AB = 1$, $PA = \sqrt{PO^2 + AO^2} = \sqrt{3}$, $PB = \sqrt{PO^2 + BO^2} = 2$,

所以 $PA^2 + AB^2 = PB^2$,

所以 $PA \perp AB$,

所以 $\text{Rt} \triangle PAB \sim \text{Rt} \triangle AHB$,

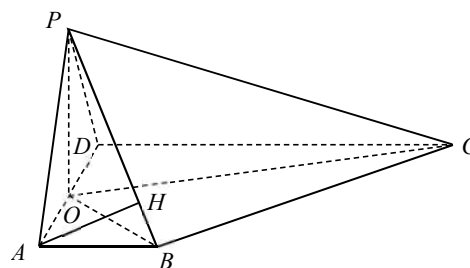
$$\text{所以} \frac{AH}{PA} = \frac{BH}{AB} = \frac{AB}{PB}.$$

$$\text{所以} AH = \frac{\sqrt{3}}{2}, BH = \frac{1}{2}.$$

因为 $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{BC}$,

$$\text{所以} \overrightarrow{AC}^2 = \overrightarrow{AH}^2 + \overrightarrow{HB}^2 + \overrightarrow{BC}^2 + 2\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{HB} + 2\overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{BC} + 2\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC},$$

$$\text{即} 13 = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} + 8 + 2\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC}, \text{ 解得 } \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 2, \quad \text{.....10 分}$$



$$\text{所以 } \cos \langle \overrightarrow{AH}, \overrightarrow{BC} \rangle = \frac{\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{AH}| \cdot |\overrightarrow{BC}|} = \frac{2}{\frac{\sqrt{3}}{2} \times 2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

设二面角 $A-PB-C$ 的大小为 θ ,

$$\text{则 } \cos \theta = \cos(\pi - \langle \overrightarrow{AH}, \overrightarrow{BC} \rangle) = -\cos \langle \overrightarrow{AH}, \overrightarrow{BC} \rangle = -\frac{\sqrt{6}}{3},$$

$$\text{所以 } \sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

即二面角 $A-PB-C$ 的正弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$12 分

20. 【解】 (1) 设 $P(x_0, y_0)$, 则 $y_0^2 = 4x_0$,

因为点 P 在第一象限, 所以 $y_0 = 2\sqrt{x_0}$,

对 $y = 2\sqrt{x}$ 两边求导得: $y' = \frac{1}{\sqrt{x}}$, 所以直线 l 的斜率为 $\frac{1}{\sqrt{x_0}}$,

所以直线 l 的方程为 $y - 2\sqrt{x_0} = \frac{1}{\sqrt{x_0}}(x - x_0)$,2 分

令 $y = 0$, 则 $x = -x_0$, 所以 $M(-x_0, 0)$,3 分

所以线段 MP 的中点为 $(0, \frac{y_0}{2})$,

所以线段 MP 的中点在定直线 $x = 0$ 上.5 分

(2) 若 $P(2, 2\sqrt{2})$, 则 $M(-2, 0)$.

$$\text{所以 } k_{MP} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad k_{PF} = 2\sqrt{2},$$

因为 $PN \perp l$, 所以 $k_{PN} = -\sqrt{2}$,

所以直线 $PF: y = 2\sqrt{2}(x-1)$, 直线 $PN: y = -\sqrt{2}(x-4)$.

$$\text{由 } \begin{cases} y^2 = 4x, \\ y = 2\sqrt{2}(x-1), \end{cases} \text{ 得 } 2x^2 - 5x + 2 = 0, \text{ 所以 } x = \frac{1}{2} \text{ 或 } 2,$$

所以 $Q(\frac{1}{2}, -\sqrt{2})$,7 分

$$\text{由 } \begin{cases} y^2 = 4x, \\ y = -\sqrt{2}(x-4), \end{cases} \text{ 得 } x^2 - 10x + 16 = 0, \text{ 所以 } x = 2 \text{ 或 } 8,$$

所以 $N(8, -4\sqrt{2})$9 分

解法一：因为 $M(-2, 0)$, $Q(\frac{1}{2}, -\sqrt{2})$, $N(8, -4\sqrt{2})$,

所以 $k_{MQ} = -\frac{2\sqrt{2}}{5}$, $k_{MN} = -\frac{2\sqrt{2}}{5}$,

所以点 M, Q, N 三点共线.12 分

解法二：因为 $M(-2, 0)$, $Q(\frac{1}{2}, -\sqrt{2})$, $N(8, -4\sqrt{2})$,

所以 $\overrightarrow{MQ} = (\frac{5}{2}, -\sqrt{2})$, $\overrightarrow{MN} = (10, -4\sqrt{2})$,

所以 $\overrightarrow{MN} = 4\overrightarrow{MQ}$,

又向量 $\overrightarrow{MQ}$ 和向量 $\overrightarrow{MN}$ 有公共起点,

所以点 M, Q, N 三点共线.12 分

21. 【解】 (1) 设每组检测的次数为 X ,

则 X 的可能取值为 1, 11.1 分

$$P(X=1) = (1-p)^{10} = 0.995^{10} = 0.9511,$$

$$P(X=11) = 1 - P(X=1) = 1 - 0.9511 = 0.0489.$$

所以 X 的分布列为

X	1	11
P	0.9511	0.0489

.....3 分

$$\text{所以 } E(X) = 1 \times 0.9511 + 11 \times 0.0489 = 1.489.$$

所以每组检测次数的期望值是 1.489 次.5 分

(2) 当每组的人数为 10 人时, 设每组检测的次数为 X .

则 X 的可能取值为 1, 11.

$$P(X=1) = (1-p)^{10}, \quad P(X=11) = 1 - (1-p)^{10}.$$

所以 X 的分布列为

X	1	11
P	$(1-p)^{10}$	$1-(1-p)^{10}$

所以 $E(X) = 1 \times (1-p)^{10} + 11 \times [1 - (1-p)^{10}] = 11 - 10(1-p)^{10}$.

当每组的人数为 30 人时，设每组检测的次数为 Y .

则 Y 的可能取值为 1, 31.

$$P(Y=1) = (1-p)^{30}; \quad P(X=31) = 1 - (1-p)^{30}.$$

所以 Y 的分布列为

Y	1	31
P	$(1-p)^{30}$	$1 - (1-p)^{30}$

所以 $E(Y) = 1 \times (1-p)^{30} + 31 \times [1 - (1-p)^{30}] = 31 - 30(1-p)^{30}$.

$$\text{所以 } 3E(X) - E(Y) = 3 \times [11 - 10(1-p)^{10}] - [31 - 30(1-p)^{30}]$$

$$= 30(1-p)^{30} - 30(1-p)^{10} + 2. \quad \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

解法一：设 $(1-p)^{10} = t$, $f(t) = 30t^3 - 30t + 2$ ($0 \leq t \leq 1$),

$$\text{则 } f'(t) = 90t^2 - 30 = 30(3t^2 - 1),$$

当 $0 \leq t < \frac{\sqrt{3}}{3}$ 时, $f'(t) < 0$, $f(t)$ 在 $\left[0, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ 上单调递减;

当 $\frac{\sqrt{3}}{3} < t \leq 1$ 时, $f'(t) > 0$, $f(t)$ 在 $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, 1\right]$ 上单调递增.

所以当 $t = \frac{\sqrt{3}}{3}$ 时, $f(t)$ 有最小值为 $\frac{6-20\sqrt{3}}{3} < 0$;

当 $t = 0$ 或 1 时, $f(t)$ 有最大值为 $2 > 0$, \dots\dots\dots 10 \text{ 分}

所以存在 p_1, p_2 , 满足 $t_1 = (1-p_1)^{10}, t_2 = (1-p_2)^{10}$,

且 $t_1 \in \left(0, \frac{\sqrt{3}}{3}\right), t_2 \in \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, 1\right)$, 使得 $f(t_1) = f(t_2) = 0$.

当 $t \in (0, t_1) \cup (t_2, 1)$ 时, $3E(X) - E(Y) > 0$, 即 $3E(X) > E(Y)$,

此时, 每组 30 人更优越;

当 $t \in (t_1, t_2)$ 时, $3E(X) - E(Y) < 0$, 即 $3E(X) < E(Y)$

此时, 每组 10 人更优越.

所以, 分组方法的优越性与 p 的值有关.12 分

解法二: 当 $p = 0.005$ 时,

$$3E(X) - E(Y) = 30 \times 0.8604 - 30 \times 0.9511 + 2 = -0.721 < 0,$$

即 $3E(X) < E(Y)$;10 分

当 $p = 0.5$ 时,

$$3E(X) - E(Y) = 30 \times 0.5^{30} - 30 \times 0.5^{10} + 2 > 2 - \frac{30}{2^{10}} > 0,$$

即 $3E(X) > E(Y)$.

所以, 分组方法的优越性与 p 的值有关.12 分

22. 【解】(1) $f'(x) = e^x(x^2 + mx + 1) + e^x(2x + m) = e^x(x+1)(x+m+1)$1 分

① 当 $m = 0$ 时, $f'(x) \geq 0$, $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增.2 分

② 当 $m < 0$ 时, 令 $f'(x) > 0$, 得 $x < -1$ 或 $x > -m-1$,

令 $f'(x) < 0$, 得 $-1 < x < -m-1$.

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, -1]$ 和 $[-m-1, +\infty)$ 上单调递增,

在 $(-1, -m-1)$ 上单调递减.3 分

③ 当 $m > 0$ 时, 令 $f'(x) > 0$, 得 $x < -m-1$ 或 $x > -1$,

令 $f'(x) < 0$, 得 $-m-1 < x < -1$.

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, -m-1]$ 和 $[-1, +\infty)$ 上单调递增,

在 $(-m-1, -1)$ 上单调递减.4 分

(2) 解法一: 不等式 $x^2 - mx + 1 + e^{x+2} \geq 0 \Leftrightarrow e^{-x}(x^2 - mx + 1) + e^2 \geq 0$.

令 $-x = t$, 得 $e^t(t^2 + mt + 1) + e^2 \geq 0$,

即 $(t^2 + mt + 1)e^t \geq -e^2$6 分

① 当 $m = 0$ 时, $(t^2 + mt + 1)e^t = (t^2 + 1)e^t > 0 \geq -e^2$7 分

② 当 $m < 0$ 时, 当 $t < -1$ 时, $(t^2 + mt + 1)e^t > 0 > -e^2$,

当 $t \geq -1$ 时, $f(t)_{\min} = f(-m-1) = \frac{m+2}{e^{m+1}} \geq -e^2$.

设 $g(m) = \frac{m+2}{e^{m+1}} (m < 0)$, $g'(m) = -\frac{m+1}{e^{m+1}}$.

当 $m < -1$ 时, $g'(m) > 0$, $-1 < m < 0$ 时, $g'(m) < 0$.

$g(m)$ 在 $(-\infty, -1]$ 上单调递增, $g(m)$ 在 $[-1, 0]$ 单调递减.

因为 $g(-3) = -e^2$, $g(0) = \frac{2}{e}$,

所以由 $\frac{m+2}{e^{m+1}} \geq -e^2$, 解得 $m \in [-3, 0)$,

综上 $m \in [-3, 0)$9 分

③ 当 $0 < m \leq 2$ 时, $t^2 + mt + 1 = (t + \frac{m}{2})^2 + 1 - \frac{m^2}{4} \geq 0$,

所以 $(t^2 + mt + 1)e^t \geq 0 > -e^2$10 分

④ 当 $m \geq 2$ 时, $f(t)$ 在 $(-\infty, -m-1]$ 和 $[-1, +\infty)$ 上单调递增,

$f(t)$ 在 $(-m-1, -1)$ 上单调递减.

当 $t \leq -m-1$ 时, $t^2 + mt + 1 = t(t+m) + 1 \geq m+2 > 0$, $(t^2 + mt + 1)e^t > 0 \geq -e^2$.

当 $t \geq -m-1$ 时, $f(t)_{\min} = f(-1) = \frac{2-m}{e} \geq -e^2$, 解得 $m \leq e^3 + 2$.

所以, $2 \leq m \leq e^3 + 2$.

综上, m 的取值范围是 $[-3, e^3 + 2]$12 分

解法二: 不等式 $x^2 + e^{x+2} + 1 \geq mx$ 恒成立,

① 当 $x = 0$ 时, $e^2 + 1 \geq 0$ 恒成立, 所以 $m \in \mathbf{R}$,5 分

② 当 $x > 0$ 时, $m \leq \frac{x^2 + e^{x+2} + 1}{x}$ 恒成立,

令 $F(x) = \frac{x^2 + e^{x+2} + 1}{x}, x > 0$,

则 $F'(x) = \frac{x^2 + (x-1)e^{x+2} - 1}{x^2} = \frac{(x-1)(x + e^{x+2} + 1)}{x^2}$,

因为 $x > 0$, 所以 $x + e^{x+2} + 1 > 0$,

且当 $x \in (0, 1)$ 时, $F'(x) < 0$, 所以 $F(x)$ 单调递减,

当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $F'(x) > 0$, 所以 $F(x)$ 单调递增,

所以 $F(x)_{\min} = F(1) = e^3 + 2$, 所以 $m \leq e^3 + 2$8 分

③当 $x < 0$ 时, $m \geq \frac{x^2 + e^{x+2} + 1}{x}$,

令 $F(x) = \frac{x^2 + e^{x+2} + 1}{x}, x < 0$,

则 $F'(x) = \frac{x^2 + (x-1)e^{x+2} - 1}{x^2} = \frac{(x-1)(x + e^{x+2} + 1)}{x^2}$,

因为 $x < 0$, 所以 $x-1 < 0$,

令 $h(x) = x + e^{x+2} + 1, x < 0$, 则 $h(-2) = 0$,

因为 $h'(x) = e^{x+2} + 1 > 0$, 所以 $h(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 单调递增,

所以当 $x \in (-\infty, -2)$ 时, $h(x) < 0$, $F'(x) > 0$,

当 $x \in (-2, 0)$ 时, $h(x) > 0$, $F'(x) < 0$,

所以 $F(x)$ 在 $(-\infty, -2)$ 单调递增, 在 $(-2, 0)$ 单调递减,

所以 $F(x)_{\max} = F(-2) = -3$, 所以 $m \geq -3$11 分

综上, $-3 \leq m \leq e^3 + 2$,

故 m 取值范围是 $[-3, e^3 + 2]$12 分